CONCOURS
Geipi Polytech

NOM :	**PRENOM :**

Centre d'écrit :	**N° Inscription :**

SUJET DE MATHEMATIQUES

Série STI2D et STL

Mercredi 14 mai 2014

Epreuves Geipi Polytech

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.

La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Ne rien inscrire
ci-dessous

1	
2	
3	
4	

TOTAL

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une laiterie conditionne du fromage râpé dans des sachets. La masse de fromage que doit contenir chaque sachet est de $\mathbf{125}$ grammes.

Partie A

On choisit au hasard un sachet dans l'ensemble des sachets produits. La variable aléatoire X représentant la masse de fromage contenu dans le sachet, exprimée en **grammes**, suit une loi normale. Le tableau ci-dessous donne, pour certaines valeurs de k, une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $\mathbb{P}(X \leq k)$ que la masse de fromage contenu dans le sachet soit inférieure ou égale à k grammes.

k	124	$124,5$	125	$125,5$	126	$126,5$
$\mathbb{P}(X \leq k)$	$0,0013$	$0,0062$	$0,0228$	$0,0668$	$0,1587$	$0,3085$

k	127	$127,5$	128	$128,5$	129	$129,5$
$\mathbb{P}(X \leq k)$	$0,5$	$0,6915$	$0,8413$	$0,9332$	$0,9772$	$0,9938$

La laiterie considère que :

- le sachet est conforme lorsque sa masse de fromage est comprise entre $\mathbf{125}$ et $\mathbf{129}$ grammes,
- le sachet est refusé si sa masse de fromage est strictement inférieure à $\mathbf{125}$ grammes,
- le sachet est recalibré si sa masse de fromage est strictement supérieure à $\mathbf{129}$ grammes.

I-A-1- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_1 que le sachet soit refusé.

I-A-2- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_2 que le sachet soit recalibré.

I-A-3- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que le sachet soit conforme.

Partie B

Un lot de sachets de fromage est livré à un hypermarché. On admet que la proportion de sachets non conformes dans le lot est $p = 0,04$.

I-B-1- $\mathbf{20}$ sachets prélevés au hasard lors de la livraison sont contrôlés. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de sachets non conformes parmi ces $\mathbf{20}$ sachets. Y suit une loi binomiale.

I-B-1-a- Quels sont les paramètres de la loi de Y ?

I-B-1-b- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité P_4 qu'il y ait exactement un sachet non conforme.

I-B-1-c- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité P_5 qu'il y ait au plus un sachet non conforme.

I-B-2- L'intervalle de fluctuation asymptotique à $\mathbf{95\%}$ de la fréquence de sachets non conformes pour un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

I-B-2-a- Donner l'intervalle I pour un échantillon de taille $\mathbf{200}$. Les bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.

I-B-2-b- Lors d'une livraison, l'hypermarché contrôle la conformité des sachets en prélevant $\mathbf{200}$ sachets au hasard. $\mathbf{5}$ sachets s'avèrent être non conformes. Au vu de l'intervalle I précédent, une réclamation auprès de la laiterie est-elle justifiée ? Expliquer pourquoi.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $P_1 \simeq$

I-A-2- $P_2 \simeq$

I-A-3- $P_3 \simeq$

I-B-1-a- Y suit une loi binomiale de paramètres

I-B-1-b- $P_4 \simeq$

I-B-1-c- $P_5 \simeq$

I-B-2-a- $I =$

I-B-2-b- Une réclamation .... justifiée car

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 60 - 50 \times 0,8^n.$$

II-A-1- Donner les valeurs exactes de u_0, u_1, u_2 et une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{10}.

II-A-2-a- Donner, pour tout entier n, l'expression de u_{n+1} en fonction de n.

II-A-2-b- En déduire que, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,8^n$.

II-A-2-c- Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

II-A-3- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Justifier la réponse.

II-A-4 Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq 50$. Justifier la réponse.

Partie B

Un opérateur de téléphonie mobile, dont le nombre d'abonnés s'élevait à **10** milliers en **2010**, constate que, depuis **2010** :
- il y a **12** milliers de nouveaux abonnés chaque année,
- **80%** des abonnés reconduisent leur abonnement l'année suivante.

L'opérateur pense que cette situation va se prolonger dans les années suivantes.
Ainsi en notant, pour tout entier n, u_n le nombre d'abonnés, exprimés en **milliers**, de l'année $2010 + n$, on peut écrire :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = 0,8\, u_n + 12.$$

On admet que, pour tout entier n, $u_n = 60 - 50 \times 0,8^n$.

II-B-1- Quel était le nombre d'abonnés en **2011** ? en **2012** ?

II-B-2- Donner, à l'unité près, le nombre d'abonnés prévus en **2020**.

II-B-3- A partir de quelle année le nombre d'abonnés sera-t-il au moins cinq fois plus élevé qu'en **2010** ? Justifier la réponse.

II-B-4- On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
        $n$ est un entier naturel, $u$ est un réel
Début de l'Algorithme
        $n$ prend la valeur $0$
        $u$ prend la valeur $10$
        Tant que   $|u - 60| > 10^{-1}$   faire
        |       $n$ prend la valeur $n + 1$
        |       $u$ prend la valeur $0,8 \times u + 12$
        FinTantque
        Afficher $n$
Fin de l'algorithme
```

En utilisant le tableau donné ci-dessous, donner la valeur affichée par cet algorithme.

Extrait de la table de valeurs approchées à 10^{-3} près des termes de la suite (u_n) :

n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
u_n	59,705	59,764	59,811	59,849	59,879	59,903	59,923	59,938	59,950	59,960

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$u_0 =$ $u_1 =$ $u_2 =$ $u_{10} \simeq$
II-A-2-a-	Pour tout entier n, $u_{n+1} =$
II-A-2-b-	Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,8^n$ car
II-A-2-c-	La suite (u_n) est car
II-A-3-	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ car
II-A-4-	$n_0 =$ car
II-B-1-	En **2011**, le nombre d'abonnés était de .... En **2012**, le nombre d'abonnés était de ....
II-B-2-	En **2020**, il devrait y avoir environ .... abonnés.
II-B-3-	C'est à partir de l'année .... que le nombre d'abonnés devrait être au moins cinq fois plus élevé qu'en **2010**. En effet
II-B-4-	Valeur affichée par l'algorithme :

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f(x) = x + a + \frac{b}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

f' désigne la dérivée de f.

Partie A

III-A-1- Pour tout réel $x > 0$, donner $f'(x)$ en fonction de b.

III-A-2- Exprimer $f(1)$ en fonction de a et b et $f'(1)$ en fonction de b.

III-A-3- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(1\,;\,2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

III-A-3-a- En déduire les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

III-A-3-b- Déterminer les valeurs de a et b. Justifier les calculs.

Partie B

On admet que la fonction f est définie par :

$$\text{pour tout } x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

III-B-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

III-B-1-b- Donner $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote Δ dont on donnera une équation cartésienne.

III-B-2- Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

III-B-3- Dresser le tableau des variations de f.

III-B-4- Soit I le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point I.

III-B-5- Sur la figure, placer les points A et I, tracer les tangentes $\mathcal{C}_f$ en A et I, puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

III-B-6- On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

III-B-6-a- Sur la figure de la question **III-B-5-**, hachurer le domaine $\mathcal{D}$.

III-B-6-b- Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aires, du domaine $\mathcal{D}$. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. Détailler le calcul.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1- Pour tout $x > 0$, $f'(x) =$

III-A-2- $f(1) =$ $f'(1) =$

III-A-3-a- $f(1) =$ $f'(1) =$

III-A-3-b- $a =$ $b =$

En effet

III-B-1-a- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

III-B-1-b- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ Δ :

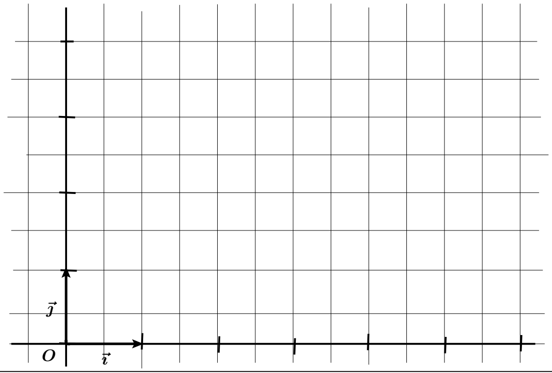
III-B-2- Pour tout $x > 0$, $f'(x) =$

III-B-3-

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

III-B-4- Equation de la tangente en I :

III-B-5-



III-B-6-a- Utiliser la figure de **III-B-5-**.

III-B-6-b- $\mathcal{A} =$

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Un apiculteur étudie l'évolution du nombre d'abeilles qui vivent dans ses ruches.

Partie A

Il estime que, au **15** mars **2014**, **4** millions d'abeilles vivaient dans ses ruches.
A partir de cette date, pour tout $t \geq 0$, $y(t)$ désigne le nombre d'abeilles estimé dans ses ruches au bout du temps t.
$y(t)$ est exprimé en **millions** et le temps t est exprimé en **années**.
On observe, depuis quelques années, une diminution régulière du nombre d'abeilles d'année en année.
Si aucune action pour la protection des abeilles n'est mise en place, on sait que la fonction y est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \quad y'(t) + 0,34\, y(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 4\,.$$

IV-A-1- y vérifie : pour tout $t \geq 0$, $y(t) = Ce^{\lambda t}$ où C et λ sont des réels. Donner les valeurs de C et λ.

IV-A-2-a- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au bout d'un an, c'est-à-dire le 15 mars 2015. Le résultat sera donné à **1000** unités près. Justifier la réponse.

IV-A-2-b- Déterminer le pourcentage de baisse du nombre d'abeilles estimé entre le **15** mars **2014** et le **15** mars **2015**. Le résultat sera donné à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

IV-A-3- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au 15 mars 2024. Le résultat sera donné à **1000** unités près. Justifier la réponse.

IV-A-4- Au bout de quelle durée D le nombre d'abeilles aura-t-il diminué de moitié par rapport au **15** mars **2014** ? On donnera une valeur approchée de D au jour près. Justifier le résultat.

IV-A-5- Donner $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Partie B

Une action de protection des abeilles est mise en place. Un ingénieur biologiste affirme que le nombre d'abeilles estimé au bout du temps t est maintenant donné par :

pour tout $t \geq 0$, $\qquad g(t) = \dfrac{1}{k\, e^{-0,34\, t} + 1}$ $\qquad$ où k est un nombre réel.

$g(t)$ est exprimé en **millions** et le temps t en **années**.

IV-B-1- Déterminer la valeur de k pour que $g(0) = 4$. Justifier le résultat.

IV-B-2- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au **15** mars **2024**. Le résultat sera donné à **1000** unités près.

IV-B-3- Donner $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.

IV-B-4- Peut-on estimer que l'action de protection des abeilles mise en place va être efficace ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-A-1-	$C =$ $\lambda =$
IV-A-2-a-	Au **15** mars **2015**, on estime qu'il y aura environ .... abeilles car
IV-A-2-b-	Le nombre d'abeilles a baissé de .... car
IV-A-3-	Au **15** mars **2024**, on estime qu'il y aura environ .... abeilles car
IV-A-4-	$D \simeq$ car
IV-A-5-	$\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) =$
IV-B-1-	$k =$ car
IV-B-2-	Au **15** mars **2024**, on estime qu'il y aura environ .... abeilles car
IV-B-3-	$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) =$
IV-B-4-	On estime que l'action de protection des abeilles mise en place .... efficace car