Correction cahier d'entrainement Accès 2010

Partie I : Logique

Exercice 1

A. FAUX. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle YWX rectangle en W, on la relation : $WX^2 + WY^2 = XY^2 \Leftrightarrow WX^2 = XY^2 - WY^2 \Leftrightarrow WX^2 = 4^2 - 2^2$. On a donc $WX^2 = 16 - 4 = 12$, soit $WX = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Or on sait que $VW = \frac{1}{3}WX$, soit $VW = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

B. FAUX. On sait que la surface d'un triangle est donné par la formule $S = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, ici on a donc $S = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

C. FAUX. La surface du cercle est donné par la formule $S = \pi r^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \pi = \frac{4}{3}\pi$.

D. FAUX. Par le calcul : la surface du triangle VWY est de : $S = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La surface hachurée en noire est celle de ce triangle moins un sixième de celle du cercle, elle est donc de $S = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{18}\pi = \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{9}$. Autre méthode : on aurait pu s'en rendre compte tout de suite en remarquant que $\sqrt{3} - \pi < 0$, or une surface ne peut pas être négative.

Exercice 2

On pose le système d'équation associé au problème, chaque variable représentant le poids de l'altère :

$$\begin{cases} W = 8 \\ X = Y + W \\ 5Y = X + W \\ Z = X + Y \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{cases} W=8 \\ X=Y+W \\ 5Y=X+W \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=8 \\ X=Y+8 \\ 5Y=X+8 \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=8 \\ X=Y+8 \\ 5Y=(Y+8)+8 \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=8 \\ X=Y+8 \\ 4Y=16 \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=8 \\ X=4+8 \\ Y=4 \\ Z=12+4 \end{cases} \begin{cases} W=8 \\ X=Y+8 \\ 4Y=16 \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=8 \\ X=12 \\ Y=4 \\ Z=16 \end{cases}$$

On peut maintenant répondre à toutes les questions :

A. FAUX **B. FAUX** **C. VRAI** **D. FAUX**

Exercice 3

Il faut déjà trouver quelle inscription est vraie parmi les trois. Supposons que la première soit vraie, et donc les deux autres sont fausses ce qui nous donne les informations suivantes :

Sur X : « Le bijou est dans ce gobelet. »

Sur Y : « Le bijou est dans ce gobelet. »

Sur Z : « Le bijou est dans le gobelet X. »

Les informations de X et de Y se contredisent, cette supposition était donc absurde. Supposons maintenant que ce soit la deuxième information qui soit correcte :

Sur X : « Le bijou n'est pas dans ce gobelet. »

Sur Y : « Le bijou n'est pas dans ce gobelet. »

Sur Z : « Le bijou est dans le gobelet X. »

Les informations de X et Z se contredisent, c'est encore absurde : supposons maintenant que la troisième soit la phrase correcte :

Sur X : « Le bijou n'est pas dans ce gobelet. »

Sur Y : « Le bijou est dans ce gobelet. »

Sur Z : « Le bijou n'est pas dans le gobelet X. »

Cette fois-ci les trois informations sont cohérentes, donc c'est la solution à notre problème car c'est la seule qui ne soit pas absurde. On peut maintenant répondre à toutes les questions :

A. FAUX **B. VRAI** **C. FAUX** **D. FAUX**

Exercice 4

Il s'agit encore d'une mise en équation, nous allons poser comme inconnues les variables suivantes :

- J l'âge des jumelles
- F l'âge du fils ainé
- M l'âge de la mère
- P l'âge du père

On a alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2J+F+M+P=172 \\ P=M+2 \\ M-F=2(F-J) \\ 2F=F+(M-J) \end{cases}$$

La quatrième équation mérité une explication : une des jumelles aura l'âge de la mère dans M-J années, en effet dans M-J années elle aura J+M-J=M année, soit l'âge de la mère actuellement. Le fils aura alors l'âge F+(M-J) puisque M-J années se seront écoulées. Et il aura alors deux fois l'âge qu'il a actuellement, soit 2F.

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2J+F+M+P=172 \\ P=M+2 \\ M-F=2(F-J) \\ 2F=F+(M-J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J+F+M+P=172 \\ P=M+2 \\ M-3F+2J=0 \\ F=(M-J) \end{cases}$$

On substitue à l'aide des équations 2 et 4 dans les équations 1 et 3 ce qui nous donne :

$$\begin{cases} 2J+F+M+P=172 \\ P=M+2 \\ M-3F+2J=0 \\ F=(M-J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J+(M-J)+M+(M+2)=172 \\ P=M+2 \\ M-3(M-J)+2J=0 \\ F=(M-J) \end{cases}$$

Les équations 2 et 4 nous donnent un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2J+(M-J)+M+(M+2)=172 \\ M-3(M-J)+2J=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J+3M=170 \\ 5J-2M=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J+6M=340 \\ 15J-6M=0 \end{cases} \Leftrightarrow 17J=340,(l_1+l_2)$$

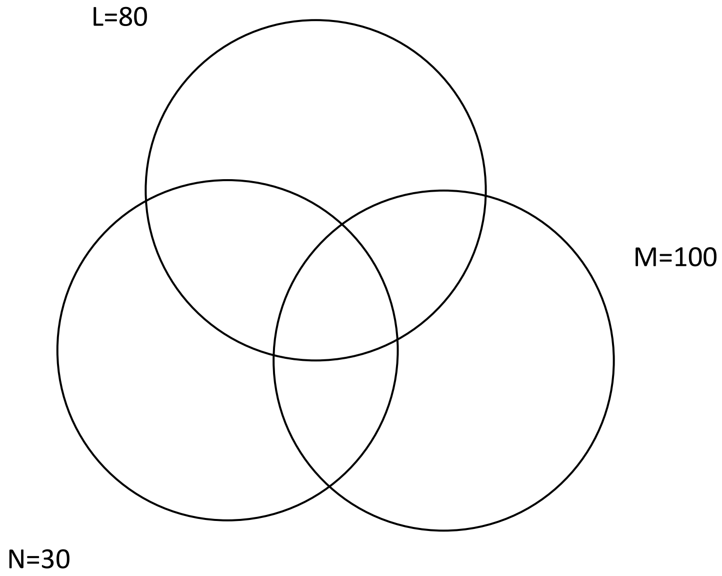
Les jumelles sont donc âgées de 20 ans, la mère de 50 ans (car 2M=5J), le fils de 30 ans (car F = M – J) et le père à 2 ans de plus que la mère soit 52 ans.

Nous pouvons maintenant répondre à toutes les questions :

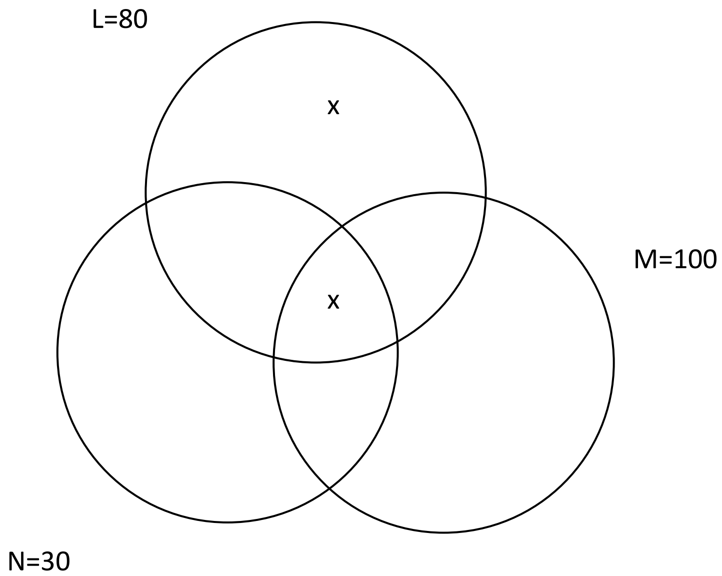
A. VRAI **B. FAUX** **C. FAUX** **D. VRAI**

Exercice 5

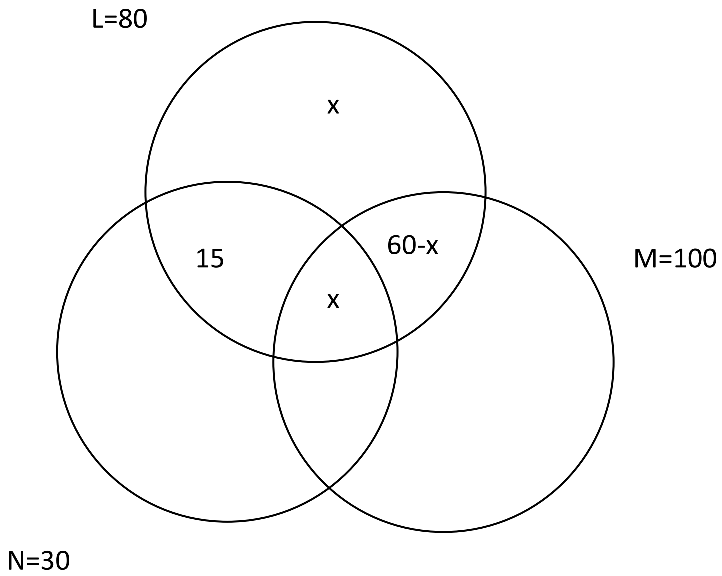
Faisons un diagramme pour représenter la situation :



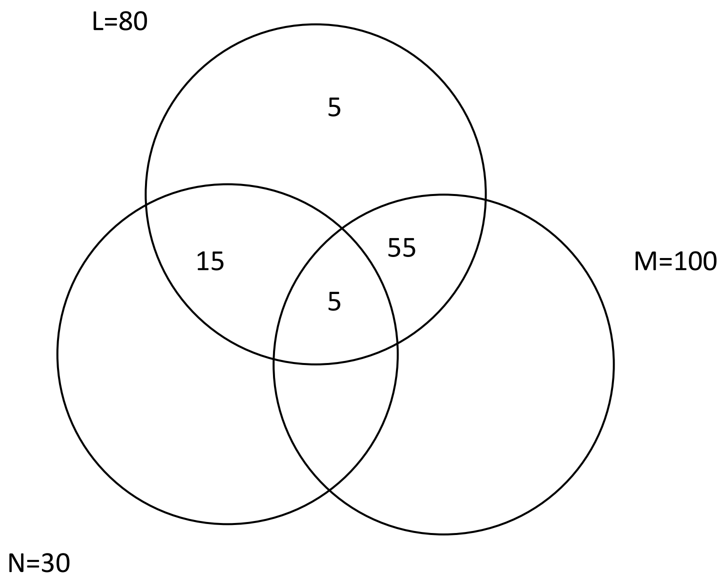
La deuxième information nous dit qu'il y autant de personne lisant les trois revues que la revue L seule, on place l'inconnue x dans la case trois revues et on a donc :



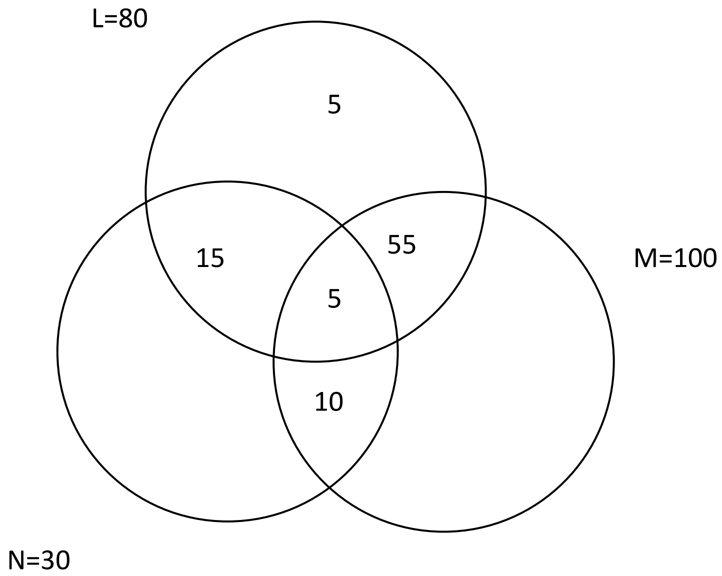
Ceux qui lisent les seulement les revues L et N sont au nombre de 15, et que 60 lisent M et L et puisque x lisent déjà les trois revues seuls 60-x liront uniquement les revues L et M, et on a donc :



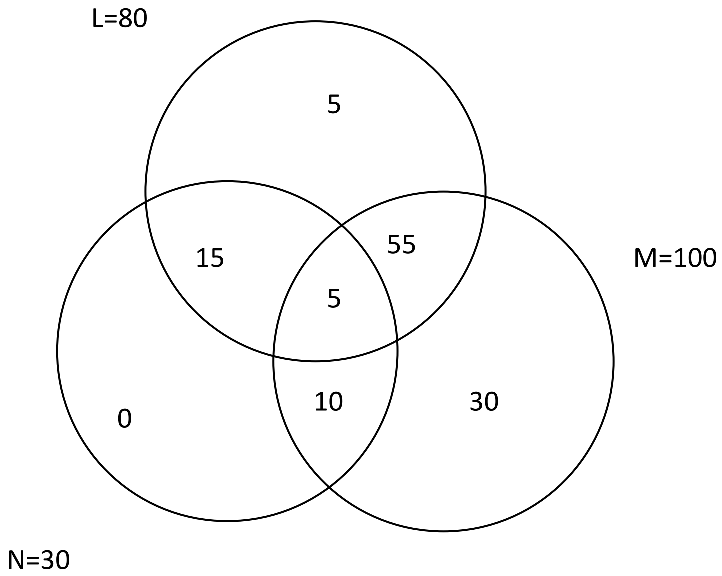
Ce qui nous permet de déterminer x, puisque la somme de tous les lecteurs de la revue L est de 80, on a l'équation $x+x+15+60-x=80 \Leftrightarrow x=5$



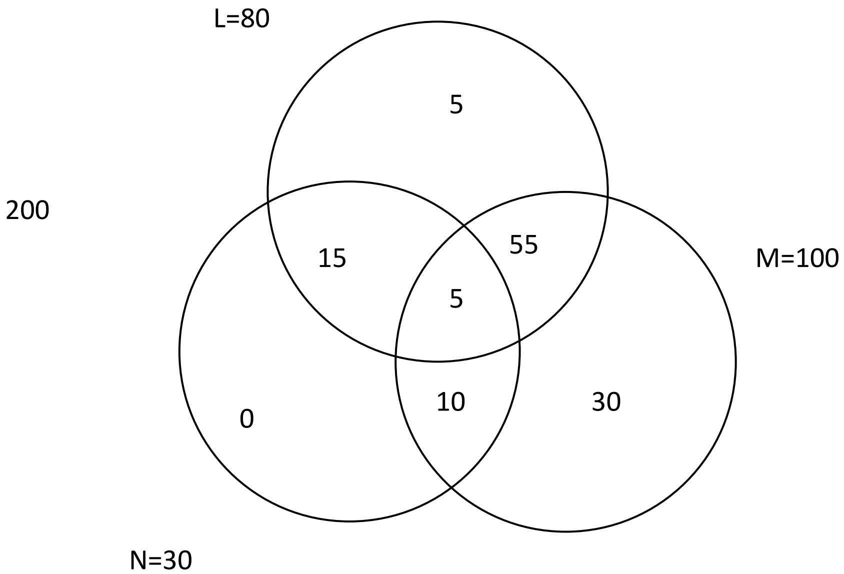
Puisque 80 personnes lisent exactement deux revues, et que 15 lisent uniquement L et N et 55 uniquement L et M, alors 80-55-15 lisent uniquement M et N, soit 10 personnes.



On peut compléter les personnes ne lisant que les revues N et M :



On constate que 120 personnes lisent une revue, et donc puisque 320 personnes ont été interrogé, 200 n'en lisent aucune, le diagramme final est donc :



Nous pouvons maintenant répondre à toutes les questions :

A. VRAI **B. VRAI** **C. VRAI** **D. FAUX**

Exercice 6

Aidons-nous d'un tableau pour résoudre cet exercice :

	Cadre Sup.	Cadre Moyen	Employés	Total
Temps plein	9	16		
Temps partiel				
Total			270	

Si 9 cadres supérieurs représentent 90% des cadres supérieurs, alors il y a un total de 10 cadres supérieurs. De même si 16 cadres moyens représentent 80% des cadres moyens alors il y a un total de 20 cadres moyens. De plus un tiers de 270 représente 90, donc notre tableau est le suivant :

	Cadre Sup.	Cadre Moyen	Employés	Total
Temps plein	9	16	180	205
Temps partiel	1	4	90	95
Total	10	20	270	300

Nous pouvons maintenant répondre aux questions de l'exercice :

A. FAUX **B. VRAI** **C. FAUX** **D. VRAI** (30 sur 300)

Partie II : Mathématiques

Exercice 7

Soit $f\left(x\right)=2x\sqrt{x-4}$

A.VRAI. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ et par composition des limites on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4-x}=+\infty$ donc par produit des limites on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$.

B. VRAI. Calculons $f'\left(x\right)$, il s'agit d'un produit de fonctions, on a donc $f'\left(x\right)=2\sqrt{4-x}+2x\times\dfrac{-1}{2\sqrt{x-4}}=2\sqrt{4-x}+\dfrac{-x}{\sqrt{4-x}}$, après réduction au même dénominateur on obtient : $f'\left(x\right)=2\sqrt{4-x}+\dfrac{-x}{\sqrt{4-x}}=\dfrac{8-2x-x}{\sqrt{4-x}}=\dfrac{8-3x}{\sqrt{4-x}}$. **FAUX :** la racine est mal placée sur la réponse proposée.

C. Pour déterminer le maximum d'une fonction on peut dresser son tableau de variation :

x	$-\infty$		$8/3$		4
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{8}{3}\right)$	↘	0

La fonction f atteint sont maximum en $8/3$, calculons ce maximum : $f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{16}{3}\sqrt{4-\dfrac{8}{3}}=\dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{12-8}{3}}=\dfrac{32}{3\sqrt{3}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$. Puisque c'est le maximum de la fonction, on a $f\left(x\right)\leq\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$.

D. FAUX. Calculons l'équation de la tangente en 0, son équation est donnée par la formule : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=4x$. Pour connaître la position de la courbe par rapport à sa tangente on forme la différence $f(x)-y=2x\sqrt{4-x}-4x=2x\left(\sqrt{4-x}-2\right)$. On établit le tableau de signe :

x	$-\infty$	0	4
$2x$	-		+
$\sqrt{4-x}-2$	+		-
$f(x)-y$	-		+

La fonction est toujours en dessous de sa tangente.

Exercice 8

A. FAUX. Soit $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(x^2\right)}$. Cette fonction n'est pas définie pour x=1 car alors $\ln\left(x^2\right)=\ln(1)=0$. Le domaine donné n'est donc pas correct. On a en fait $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

B. VRAI. On remarque que $\ln\left(1+x^2\right)=\ln\left(x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right)=\ln\left(x^2\right)+\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$, ce qui nous donne en remplaçant dans *f* : $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}{\ln\left(x^2\right)}=1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}{\ln\left(x^2\right)}$.

C. VRAI. On a $f(-x)=f(x)$, la fonction est paire donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

D. FAUX. Faisons un tableau de signe de la fonction :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$\ln(1+x^2)$	+		+		+		+
$\ln(x^2)$	+		-		-		+
f(x)	+		-		-		+

Sur $\left]-\infty;-1\right[$, *f(x)* est strictement positive, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solutions sur cet intervalle. Idem pour les autres intervalles, l'équation $f(x)=0$ n'admet donc pas de solution sur son ensemble de définition.

Exercice 9

A. VRAI. Soit $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-e^{-x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{e^x}=\frac{e^x-(x+1)}{e^x(x+1)}=\frac{e^{-x}}{x+1}g(x).$$

B. FAUX. On calcul la dérivée de la fonction *g* : $g'(x)=e^x-1$. Or $e^x-1<0$ sur $]-\infty;0[$ et $e^x-1>0$ sur $]0;+\infty[$. Donc *g* n'est pas croissante sur $]-1;+\infty[$.

C. VRAI. On sait que *g* est croissante sur $[0;1]$ et $g(0)=0$, donc pour tout $x\in[0;1]$ on a $g(x)>g(0)=0$ et alors par intégration de l'inégalité on a $\int_0^1 g(x)>0$.

D. FAUX. Soit *F* la fonction définie par $F(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+e^{-x}$, calculons *F'* : $F'(x)=\ln(x+1)+1-1-e^{-x}=\ln(x+1)-e^{-x}\neq f(x)$. Donc *F* n'est pas une primitive de *f*.

Exercice 10

A. VRAI. Si *a=1* alors $f_{1,b}(x)=\dfrac{x^2-9}{x+b}$ et on a :

$$f_{1,b}(x)-(x-b)=\frac{x^2-9}{x+b}=\frac{x^2-9-(x-b)(x+b)}{x+b}=\frac{-9+b^2}{x+b}$$ d'où :

$\lim\limits_{x\to\infty} f_{1,b}(x)-(x-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9+b^2}{x+b}=0$. Donc la droite d'équation $y=x-b$ est asymptote oblique à la courbe de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

B. VRAI. Si on prend *a=0* alors $f_{0,b}(x)=\dfrac{-9}{x+b}$ et alors $\lim\limits_{x\to\infty} f_{0,b}(x)=0$, donc la droite d'équation *y=0* est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

C. VRAI. $f_{1,1}(x)=\dfrac{x^2-9}{x+1}$ et alors $f_{1,1}'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2-9)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+9}{(x+1)^2}$. On a $f_{1,1}(1)=\dfrac{1^2-9}{1+1}=-4$ et $f_{1,1}'(1)=\dfrac{1^2+2+9}{(1+1)^2}=3$ et donc l'équation de la tangente en 1 à la courbe de cette fonction est $y=3(x-1)-4=3x-7$. Calculons maintenant l'équation de la droite (AB), son coefficient directeur est donné par : $a=\dfrac{y_b-y_a}{x_b-x_a}=\dfrac{2-(-1)}{3-2}=3$. C'est bien le même coefficient directeur que la tangente, vérifions maintenant l'ordonnée à l'origine. On a $b=y_a-2\times3=-1-6=-7$. L'équation de la droite (AB) est donc aussi $y=3x-7$.

D. VRAI. D'après la question **A.** on a vu que $f_{1,1}(x)-(x-1)=\dfrac{-9+1^2}{x+1}=\dfrac{-8}{x+1}<0$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11

A. VRAI. $x \mapsto \sqrt{m+x}$ est définie sur $[-m;+\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{m-x}$ est définie sur $]-\infty;m]$ et alors l'équation est définie sur $[-m;+\infty[\cap]-\infty;m] = [-m;m]$.

B. VRAI. Si $0 \leq x \leq m$ alors on a :

$$\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}=x \Leftrightarrow \left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow m-x+2\sqrt{m-x}\sqrt{m+x}+m+x=x^2$$

soit : $(E) \Leftrightarrow 2\sqrt{m-x}\sqrt{m+x}=x^2-2m$.

C. VRAI. Si m=1 alors l'équation n'admet pas de solution positive car on a vu à la question précédente que pour x positif $(E) \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}=x^2-2<0$. Or $2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \geq 0$. Donc l'équation n'a pas de solution positive. Pour x négatif l'équation n'a pas de solution car $\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x} \geq 0$.

D. FAUX. Idem que pour la question précédente, si $m > \frac{1}{2}$ l'équation n'a pas de solution.

Exercice 12.

A. FAUX.

On a $u_n = \frac{3a_n-1}{3a_n-2} \Leftrightarrow u_n(3a_n-2)=3a_n-1 \Leftrightarrow 3u_na_n-2u_n=3a_n-1 \Leftrightarrow 3u_na_n-3a_n=2u_n-1$,

soit $a_n\left(3u_n-3\right)=2u_n-1 \Leftrightarrow a_n=\frac{2u_n-1}{3u_n-3}$. Donc $a_0=\frac{2u_0-1}{3u_0-3}=\frac{4-1}{6-3}=1$

B. VRAI. D'après ce qui précède on a

$$a_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{3u_{n+1}-3}=\frac{2\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{3\frac{2u_n+1}{u_n+2}-3}=\frac{\frac{4u_n+2-u_n-2}{u_n+2}}{\frac{6u_n+3-3u_n-6}{u_n+2}}=\frac{4u_n+2-u_n-2}{6u_n+3-3u_n-6}=\frac{3u_n}{3u_n-3}=\frac{u_n}{u_n-1}$$

Or $\frac{u_n}{u_n-1}=\frac{\frac{3a_n-1}{3a_n-2}}{\frac{3a_n-1}{3a_n-2}-1}=\frac{\frac{3a_n-1}{3a_n-2}}{\frac{3a_n-1-3a_n+2}{3a_n-2}}=\frac{3a_n-1}{1}=3a_n-1$

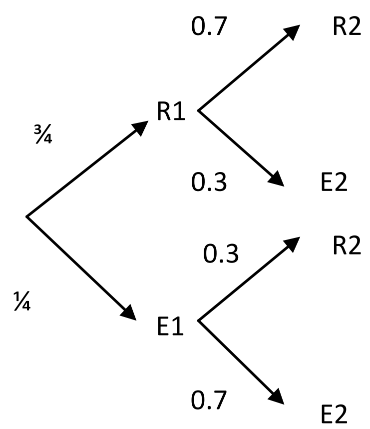
C. VRAI. Soit $b_n=a_n-\frac{1}{2}$. On a $b_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{2}=3a_n-1-\frac{1}{2}=3a_n-\frac{3}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=3b_n$. La suite est géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

D. VRAI. D'après ce qui précède on a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et de plus

$$\frac{3a_n-1}{3a_n-2} = \frac{3a_n\left(1-\frac{1}{3a_n}\right)}{3a_n\left(1-\frac{2}{3a_n}\right)} = \frac{\left(1-\frac{1}{3a_n}\right)}{\left(1-\frac{2}{3a_n}\right)}$$ et donc $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3a_n-1}{3a_n-2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{3a_n}\right)}{\left(1-\frac{2}{3a_n}\right)} = 1.$$

Exercice 13

Faisons d'abord un arbre pour représenter la situation :



A.FAUX. La probabilité de réussir le second test est :

$$P(R2) = P(R1\cap R2) + P(E1\cap R2) = \frac{3}{4}\times\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{10} = \frac{24}{40}$$

B. VRAI. La probabilité de réussir les deux tests est :

$$P(R1\cap R2) = \frac{3}{4}\times\frac{7}{10} = \frac{21}{40}$$

C. VRAI. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, écrivons la formule :

$$P_{R2}(R1) = \frac{P(R1\cap R2)}{P(R2)} = \frac{21/40}{24/40} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

D. FAUX. On écrit la formule des probabilités totales :

$$P(RE) = P(RE\cap(R1\cap R2)) + P(RE\cap(E1\cap R2)) + P(RE\cap(R1\cap E2)) + P(RE\cap(E1\cap E2))$$

Soit :

$$P(RE) = \frac{21}{40}\times 0.95 + \left(\frac{9}{40}+\frac{3}{40}\right)\times 0.6 + \frac{7}{40}\times 0.2 = 0.71375$$

Exercice 14

A. VRAI. f est définie si $x-1\neq 0$ et $x+1\neq 0$.

B. VRAI. On calcul $f(-x)=(-x)^2\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|=-x^2\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ car $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=-\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

C. FAUX. On a $f(x)=(x)^2\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|=x^2\ln|1+x|-x^2\ln|1-x|$ or $\lim\limits_{x\to 1}x^2\ln|1+x|=\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1}x^2\ln|1-x|=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

D. VRAI. Calcul trop compliqué en TS. (Erreur d'énoncé ?)

Exercice 15

A. VRAI. $f'(x)=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x+1\right)-\left(xe^x\right)\left(e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x-xe^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$, d'où :

$$f'(x)=\frac{e^{2x}+e^x+xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

B. VRAI. On a $g'(x)=e^x+1>0$. La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$. Or $g(-2)=e^{-2}+1-2<0$, car $e^{-2}<1$ et $g(1)=e+2>0$. Puisque g est une fonction continue l'équation g(x)=0 admet une unique solution sur $[-2;1]$. (TVI)

C. FAUX. $g(a)=0\Leftrightarrow e^a+a+1=0\Leftrightarrow e^a=-1-a$ et $f(a)=\dfrac{ae^a}{e^a+1}=\dfrac{a(-1-a)}{(-1-a)+1}=\dfrac{a(-1-a)}{-a}=1+a$.

D. VRAI. On fait une intégration par partie : $\displaystyle\int_{-2}^{-1}uv'=[uv]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}u'v$ avec $u=x$ et $v'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

On a alors $u'=1$ et $v=\ln\left(e^x+1\right)$ et on a donc $\displaystyle\int_{-2}^{-1}x\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[x\ln\left(e^x+1\right)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}\ln\left(e^x+1\right)dx$.

D'où le résultat.

Exercice 16

A. VRAI. On a $P(F)=\dfrac{240}{400}=0,6$ **.**

B. VRAI . On a $P=\frac{80}{400}=0,2$.

C. FAUX. Puisque seuls 80 ne font ni l'un ni l'autre alors 320 font du tennis ou du football, autrement dit $P(F\cup T)=\frac{320}{400}=0,8$.

D. FAUX. On calcul $P_T(F)=\frac{P\left(T\cap F\right)}{P(T)}=\frac{P(T)+P(F)-P(T\cup F)}{P(T)}=\frac{0,6+0,3-0,8}{0,3}=\frac{1}{3}$

Exercice 17

A. VRAI. Si $a=\frac{1}{2}$ alors le système est équivalent à : $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=1\\ x+\frac{1}{2}y=1\\ x+2y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=2\\ x+\frac{1}{2}y=1\\ x+2y=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Or dans ce dernier système les lignes 1 et 2 sont contradictoires : le système n'a pas de solution.

B. FAUX. Supposons a=0, on a alors $\begin{cases}y=1\\ x=1\\ x+2y=-1\end{cases}$. Ce système n'a pas de solution.

C. VRAI. Supposons a=1, on a alors $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=1\\ x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x+y=1\\ y=-1, l_3-l_2\end{cases}$. Le système admet une unique solution x=2 et y=-1.

Si a=2 $\begin{cases}2x+y=1\\ x+2y=1\\ x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3y=-1, l_1-2l_2\\ x+2y=1\\ x+2y=1\end{cases}$ on a alors une unique solution, $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$.

Si a=-2 $\begin{cases}-2x+y=1\\ x-2y=1\\ x+2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3y=5, l_1+2l_2\\ x-2y=1\\ x+2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-5}{3}\\ x=\frac{13}{3}\\ x+2y=1\end{cases}$. Ce qui est cohérent avec la dernière équation. Le système a bien une unique solution.

D. VRAI. On a fait le calcul à la question précédente.

Exercice 18

A. VRAI.

B. VRAI. L'équation de la droite est $y = 2x + \frac{7}{2}$. On résoud y=f(x), soit $2x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

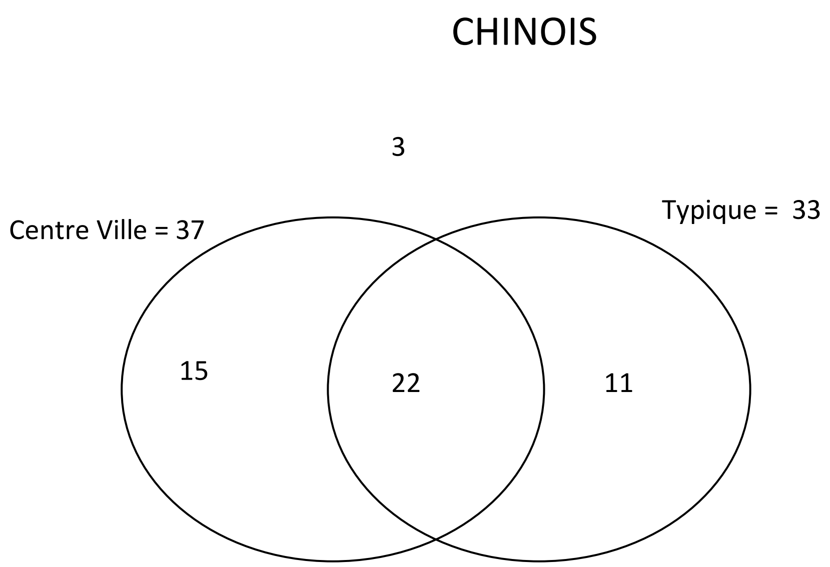
C. VRAI. $f'(x) = 2x + 1, f'(0) = 1$.

D. FAUX. $f'(2) = 5 \neq 2$

Exercice 19

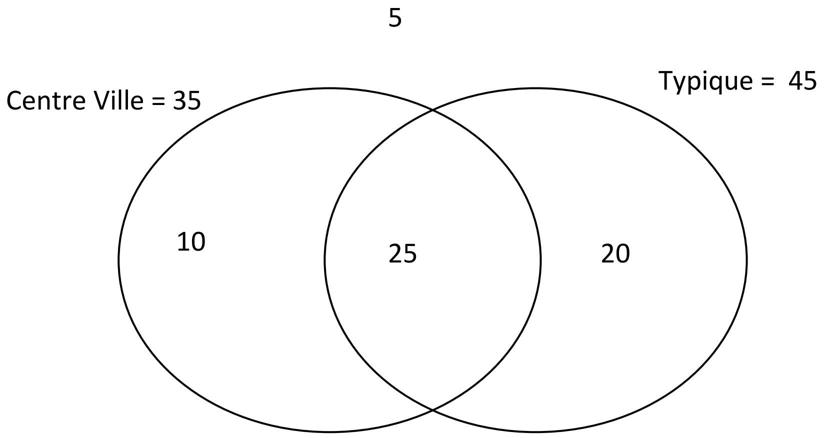
Faisons un schéma pour les personnes préférant le chinois :

On sait qu'il y a 51 personnes en tout aimant la nourriture chinoise, que parmi ceux-ci seuls 3 n'aiment ni typique ni centre ville, on a donc 3 à l'extérieur des patates. On sait que 37 aiment centre-ville et chinois et que 33 aiment typique et chinois on a donc le schéma suivant :



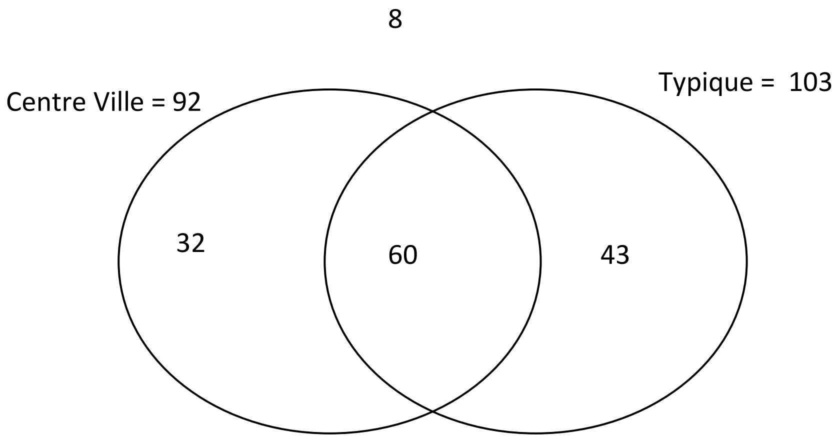
On fait de même pour ceux qui préfèrent la nourriture italienne :

ITALIEN



On fait un schéma identique pour l'ensemble de la population :

ENSEMBLE



On sait que seuls 8 personnes sont à l'extérieur car personne ne veut un restaurant ni chinois ni italien ni centre-ville ni typique.

Les personnes souhaitant centre-ville et typique sont au nombre de :

- 25 pour les italiens
- 22 pour les chinois

- Parmi 103 qui préfèrent un cadre typique 45 préfèrent italien, 33 chinois donc 25 préfèrent une cuisine autre. Parmi ces 25, 12 ne préfèrent pas en centre-ville, donc 13 préfèrent en centre-ville, typique et ni italien ni chinois.

On a donc un total de 60 personnes souhaitant typique + centre ville. Ce qui nous a permis de compléter le schéma. On peut maintenant répondre aux 8 questions d'un seul coup

19.

A) VRAI

B) FAUX

C) VRAI

D) FAUX

20)

A) VRAI (141)

B) VRAI. On a 40 personnes qui n'aiment ni la cuisine chinoise ni la cuisine italienne.

C) VRAI. La catégorie « chinois, hors centre-ville, non-typique » compte 3 personnes, sur 141 personnes interrogées.

D) FAUX. Chinois typique centre-ville compte 22 personnes alors qu'Italien, typique, centre-ville compte 25.

Exercice 21

A. FAUX. S'il ne prépare que des spaghetti, avec un stock de 15kg de pâtes il consommera 7.5kg de sauce à la viande (la moitié de 15kg) il lui en restera donc 7.5kg sur les 15.

B. FAUX. Pour préparer 9 kg de spaghetti bolognaise il lui faudra 6kg de pâtes et 3kg de sauce à la viande. Il lui reste donc 12kg de sauce à la viande et 9kg de pâtes, avec cela il peut utiliser 12kg de sauce à la viande et 6 de pâtes pour produire 18kg de lasagnes et il lui restera donc 3kg de pâtes.

C. VRAI. S'il produit 15kg de lasagne, il a utilisé 10kg de sauce à la viande et 5 de pâtes. Soit encore de quoi produire 15kg de spaghetti.

D. VRAI. Soit x le nombre de parts de 3kg de lasagne (comptant 2kg de sauce et 1kg de pâtes) et y le nombre de parts de 3kg de spaghetti (comptant 2kg de pâtes et 1kg de sauce). Puisqu'on a un stock de 15kg de pâtes et 15kg de sauce et que l'on veut tout utiliser il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+y=15 \\ x+2y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=15 \\ -3y=-15, l_2-2l_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

Il n'y a bien qu'une seule solution à ce système, qui consiste à produire 15kg de lasagnes et 15kg de spaghetti.

Exercice 22

A. FAUX. Une assiette de spaghetti contient 2/3 de pâtes et une assiette de lasagne 1/3 de pâtes la quantité de pâtes utilisé par le chef sera donc de $\frac{2}{3}S+\frac{1}{3}L$

B. VRAI. Si tous les ingrédients sont utilisé alors on a : $S+L=x+y$ et on vient de voir à la question précédente que dans ce cas on a aussi $x=\frac{2}{3}S+\frac{1}{3}L \Leftrightarrow 3x=2S+L \Leftrightarrow L=3x-2S$. On injecte cette égalité dans la première équation, ce qui nous donne : $S+3x-2S=x+y$ soit $S=2x-y$.

C. FAUX. Puisqu'une assiette pèse 300g, on a l'égalité $\sigma=\frac{S}{0.3}$ et donc $\sigma=\frac{2x-y}{0.3}=\frac{20}{3}x-\frac{10}{3}y$.

D. VRAI. On a de même $L=2y-x$ et donc $\lambda=\frac{20}{3}y-\frac{10}{3}x$, et le chiffre d'affaire est donc de $7\sigma+9\lambda=\frac{140x}{3}-\frac{70y}{3}+\frac{180y}{3}-\frac{90x}{3}=\frac{50}{3}x+\frac{110}{3}y$.

Exercice 23

A. VRAI. Entre le 3$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ pointage on a produit $y=0.5\times4=2$ plats puis entre le 4$^{\text{ème}}$ et le 5$^{\text{ème}}$ pointage on a commandé $y=0.5\times5=2.5$. Dans les 4 minutes qui précèdent le 5$^{\text{ème}}$ pointage 4.5 plats ont été commandés.

B. FAUX. Entre l'ouverture et le 24$^{\text{ème}}$ pointage le total de plats commandés est de : $\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}\frac{24\times25}{2}=150$ plats commandés.

C. VRAI. $z=3\sqrt[4]{16}=3\times2=6$.

D. VRAI. Puisque $x>1$, alors on a $x^{\frac{1}{n+1}}>1$ et donc $z>n$. Pendant les 15 premiers pointage il y a donc au moins 45 plats préparés et on vient de voir que 6 on été préparé pendant le 16$^{\text{ème}}$ pointage, soit un total d'au moins 51 plats.

Exercice 24

A. VRAI. Au quatrième pointage z=4 et y=4. Au 5ème pointage le nombre de plats cuisinés sera de $z=\sqrt{5}<2.5=0.5\times 5=y$, c'est donc bien à partir de 5ème pointage que les cuisiniers n'arrivent plus à suivre.

B. FAUX. Au 8ème pointage le nombre de plats cuisinés sera de $z=2\sqrt[3]{8}=4=y$, ce sera donc à partir de 9ème pointage que la cuisine ne suivra plus.

C. FAUX. On résout z=y, soit $nx^{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow n^{n+1}x=\frac{1}{2^{n+1}}x^{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}x^{n}$, car $x>0$ d'où

$x=\sqrt[n]{n^{n+1}2^{n+1}}$.

D. FAUX. D'après ce qui précède si n=1 alors il x=4, on a 2 cuisiniers à partir du 5ème pointage. Si n=2 alors x=8, on a 3 cuisiniers à partir du 9ème pointage. On a alors le tableau suivant

Pointage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Plats préparé total	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Cuisiniers	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
Plats par cuisinier	0.5	1	1.5	2	1.25	1.5	1.75	2	1.5	1.66

Le total de plats cuisinés par le premier cuisinier est donc de 14.66 plats.